Nesvojstveni integrali

Nesvojstveni integrali sa beskonačnim granicama integracije

Određeni Rimanov integral podrazumijeva da je ~~funkcija~~ podintegralna funkcija ograničena i da je interval integracije konačne dužine. Pojam određenog integrala možemo da uopštimo tako što ćemo posmatrati beskonačne granice integracije ili neograničene podintegralne f-je.

Razmotrimo slučaj beskonačnog intervala integracije.
Neka je f-ja $f(x)$ definisana na beskonačnom intervalu $[a,+\infty)$ i neka je integrabilna na proizvoljnom konačnom intervalu $[a,B]$, $a<B$.
Nesvojstvenim integralom 1-og roda f-je $f(x)$ nazivamo graničnu vrijednost

$$\lim_{B\to\infty}\int_a^B f(x)\,dx \quad (1)$$

koji označavamo simbolom $\int_a^\infty f(x)\,dx$.

Dakle po definiciji

$$\boxed{\int_a^\infty f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{B\to\infty}\int_a^B f(x)\,dx} \quad (2)$$

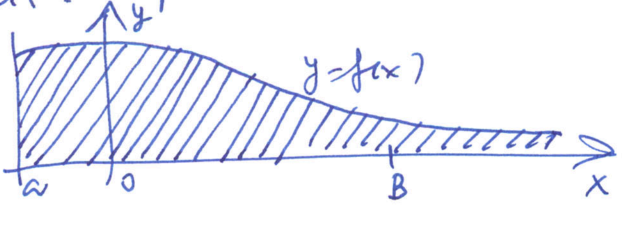
Ako granična vrijednost u (1) postoji i konačna je, to nesvojstveni integral (2) nazivamo konvergentnim, u protivnom integral je divergentan.

Analogno, definišemo nesvojstvene integrale

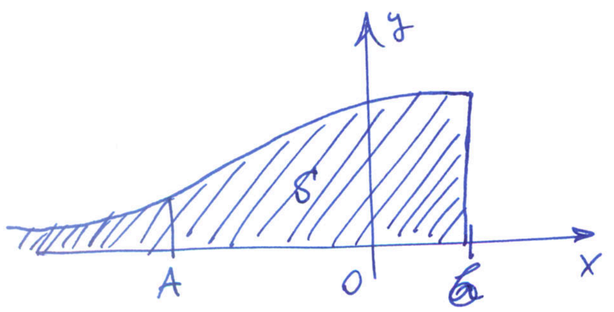
$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{A\to-\infty}\int_A^b f(x)\,dx \quad (3)$$

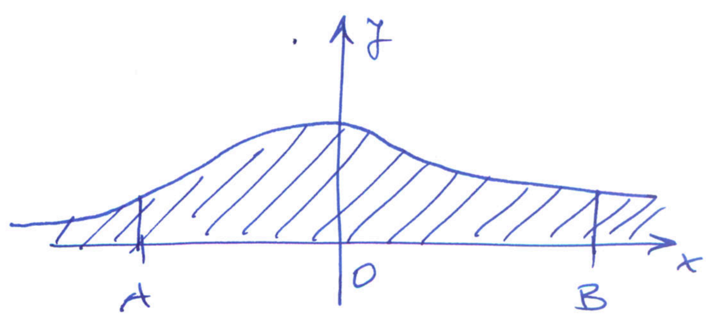
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{A\to-\infty\\ B\to+\infty}}\int_A^B f(x)\,dx. \quad (4)$$

Geometrijski, konvergentni integral (2) znači da je figura koja je ograničena krivom $y=f(x)\geq 0$, pravama $x=a$ i $y=0$ beskonačno istegnuta u pravcu ose X ima konačnu površinu S

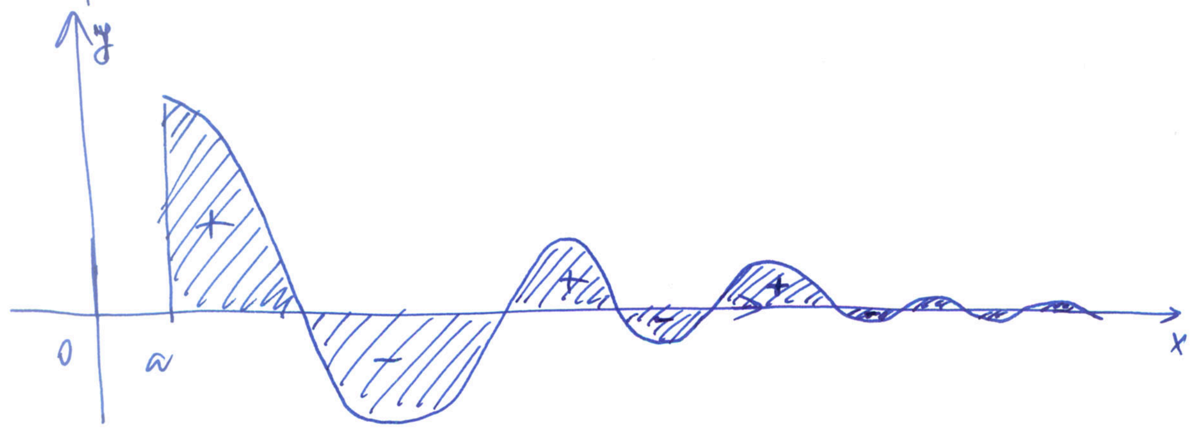


Analogno, integrali (3) i (4) su dati na slikama dolje





Ako je f-ja $f(x)$ promjenljivog znaka, na primjer na $[a,+\infty)$ to konvergentni integral je jednak algebarskoj sumi pozitivnih i negativnih površina.



Neka je F primitivna f-ja f-je $f(x)$. Po Njutn-Lajbnicovoj formuli i definiciji nesvojstvenih integrala imamo da je:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{B\to\infty}\int_a^B f(x)dx = \lim_{B\to\infty} F(x)\Big|_a^B = \lim_{B\to\infty}[F(B)-F(a)] =$$

$$= \lim_{B\to\infty} F(B) - F(a)$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty}\int_A^b f(x)dx = \lim_{A\to-\infty} F(x)\Big|_A^b = F(b) - \lim_{A\to-\infty} F(A).$$

Znači, nesvojstveni integrali (2) i (3) konvergiraju ako i samo ako postoje granične vrijednosti $\lim_{B\to+\infty} F(B)$ i $\lim_{A\to-\infty} F(A)$, respektivno.

Primjer 1. Ispitati konv. integrala $\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$

Rješ.

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{B\to+\infty}\int_0^B\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{B\to\infty} \operatorname{arctg}\Big|_0^B = \lim_{B\to\infty}(\operatorname{arctg} B - \operatorname{arctg} 0) =$$

$$= \lim_{B\to\infty}\operatorname{arctg} B = \frac{\pi}{2}.$$

Primjer 2 Ispitati za koje vrijednosti α konv. nesvojstveni integral.

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha}, \quad \alpha>0$$

Rješenje

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \int_a^\infty x^{-\alpha}dx = \lim_{B\to\infty}\int_a^B x^{-\alpha}dx = \lim_{B\to\infty}\begin{cases} \left.\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_a^B & \alpha\neq 1 \\ \ln|x|\Big|_a^B & \alpha=1\end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{B\to\infty}\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{B^{\alpha-1}}-\frac{1}{a^{\alpha-1}}\right), & \alpha\neq 1 \\ \lim\limits_{B\to\infty}(\ln B-\ln a), & \alpha=1\end{cases} = \begin{cases}\frac{1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{a^{\alpha-1}} & \alpha>1 \\ \infty, & \alpha<1 \\ \infty, & \alpha=1\end{cases}$$

Znači ovaj integral konvergira za $\alpha>1$, a divergira za $\alpha\leq 1$. $\blacktriangle$

Primijetimo da pošto je

$$\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^B f(x)dx + \int_B^\infty f(x)dx$$

to integral $\int_a^\infty f(x)dx$ konvergira ako i samo ako $\int_B^{+\infty} f(x)dx$ konvergira k nuli.

Kriterijumi konvergencije nesvojstvenih integrala

Teorema 1 (Košijev kriterijum) Da bi nesvojstveni integral $\int_a^\infty f(x)dx$ konvergirao potrebno je i dovoljno da za svako $\varepsilon>0$ postoji broj $B>a$, takav da za svako $B'>B$ i $B''>B$ važi nejednakost

$$\left|\int_{B'}^{B''} f(x)dx\right| < \varepsilon$$

Dokaz Razmotrimo f-ju $F(B)=\int_a^B f(x)dx$. Ova f-ja saglasno Košijevom kriterijumu ima konačnu graničnu vrijednost kada $B\to\infty$ akko $\forall\varepsilon>0\ \exists B>a:\ \forall B', B'', B'>B, B''>B$ i važi

$$|F(B')-F(B'')| = \left|\int_a^{B'} f(x)dx - \int_a^{B''} f(x)dx\right| = \left|\int_{B'}^{B''} f(x)dx\right| < \varepsilon$$

što je trebalo dokazati $\blacktriangle$

Teorema 2 (kriterijum upoređenja) Ako su na beskonačnom intervalu $[a,+\infty)$ definisane dvije nenegativne f-je $f(x)$ i $g(x)$, koje su integrabilne na svakom konačnom intervalu $[a,B]$, pri čemu je $0 \le f(x) \le g(x)$, $\forall x \ge a_0 \ge a$.

to tada iz konvergencije nesvojstvenog integrala $\int_a^\infty g(x)dx$ slijedi konvergencija integrala $\int_a^\infty f(x)dx$, a iz divergencije integrala $\int_a^\infty f(x)dx$ slijedi divergencija integrala $\int_a^\infty g(x)dx$.

Teorema 3 (Granični kriterijum upoređivanja ~~konvergencije~~)

Neka su na $[a,+\infty)$ definisane dvije pozitivne f-je $f(x)$ i $g(x)$ koje su integrabilne na svakom konačnom intervalu $[a,B]$. Tada ako postoji konačna granična vrijednost

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L > 0$$

to nesvojstveni integrali $\int_a^\infty f(x)dx$ i $\int_a^\infty g(x)dx$ konvergiraju ili divergiraju istovremeno.

U praksi za upoređivanje se često koristi f-ja $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$

Pokazali smo da pri $\alpha > 1$ $\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ konvergira, a pri $\alpha \le 1$ taj integral divergira.

Primjer Ispitati konvergenciju nesvojstvenog integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}.$$

Rješenje Najveći stepen trinoma je 2. Uzmimo za $g(x) = \frac{1}{x^2}$.

Tada $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+2x+2} = 1 \ne 0$.

Pošto $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ konvergira $\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$ također konvergira.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} = \lim_{A\to-\infty} \int_A^B \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} = \lim_{\substack{A\to-\infty \\ B\to+\infty}} \operatorname{arctg}(x+1)\Big|_A^B = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Primjer Ispitati konv. integrale

$$\int_{1}^{\infty} \frac{(x+1)\,dx}{(x^2+1)\sqrt[3]{x+2}}$$

Rješenje Ispitajmo ponašanje i ~~poredak kon~~ ponašanje fje kad $x \to \infty$, tj.

$$\frac{x+1}{(x^2+1)\sqrt[3]{x+2}} = \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\sqrt[3]{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}} = \frac{1+\frac{1}{x}}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}}\cdot\frac{1}{x^{4/3}} \sim \frac{1}{x^{4/3}}$$

ovaj posljednji izraz se ponaša kao $\frac{1}{x^{4/3}}$ kad $x \to \infty$. Pošto je $\alpha = 4/3 > 1 \Rightarrow \int_1^\infty \frac{dx}{x^{4/3}}$ konvergira.

Za nesvojstvene integrale važi zamjena promjenljivih, parcijalna integracija.

Nesvojstveni integrali od neograničenih fja

Pretpostavimo da je fja $f(x)$ definisana na $[a,b)$ i neograničena za $x \to b-0$ tj. $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \infty$. (Tačka b se naziva singularnom tačkom za fju $f(x)$) Pretpostavimo da je za svako $\varepsilon > 0$ fja $f(x)$ na intervalu $[a, b-\varepsilon]$ integrabilna, tj da postoji $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ koji predstavlja integral sa promjenljivom gornjom granicom integracije. Ako postoji konačna granična vrijednost

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

to ~~kao~~ graničnu vrijednost nazivamo nesvojstvenim integralom od fje $f(x)$ na intervalu $[a,b)$ i označavamo simbolom

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

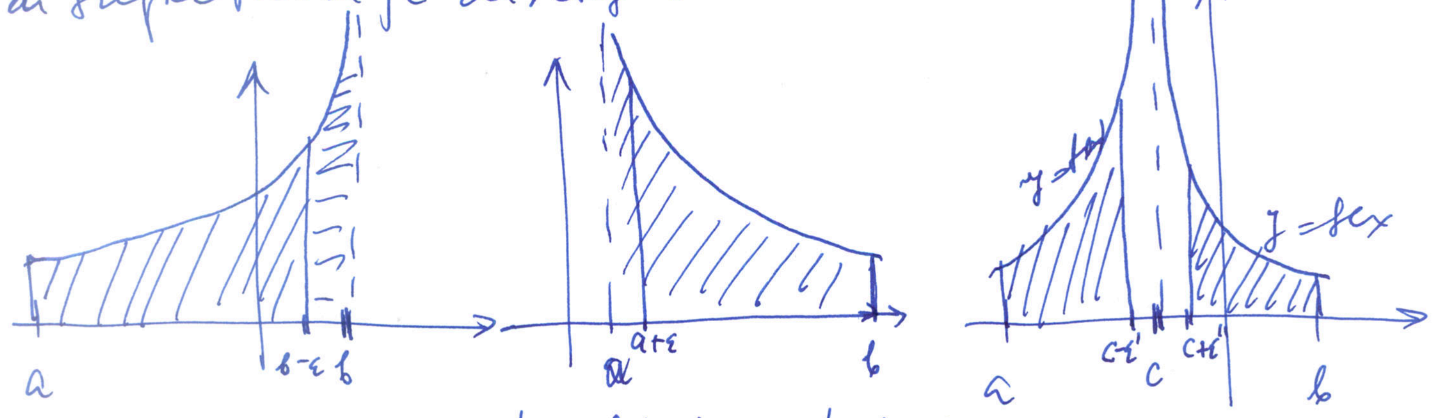
Analogno, ako $f(x)$ ~~nije~~ ~~ogr~~ nije ograničena u $x=a$ tj $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

Ako je f-ja neograničena za $x=c$, $a<c<b$ to tada

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\varepsilon'\to+0\\ \varepsilon''\to+0}}\left(\int_a^{c-\varepsilon'} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon''}^{b} f(x)dx\right)$$

Nesvojstveni integral je konvergentan ako postoje granične vrijednosti u suprotnom je divergentan.



Ako je $F(x)$ primitivna f-ja f-je $f(x)$ tada je

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0} F(x)\Big|_a^{b-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to+0} F(b-\varepsilon)-F(a) = F(b-0)-F(a)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0} F(x)\Big|_{a+\varepsilon}^{b} = F(b)-F(a+0).$$

Primjer Izračunati nesvojstveni integral $\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Rješenje $x\to1$ $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ nije ograničena =)

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}\Big|_0^{1-\varepsilon} = 1$$

Sve što smo rekli za nesvojstvene integrale na neograničenom intervalu važi i za neograničene f-je.

Pretpostavimo da su f-je neograničene u tački c, $a\le c\le b$. Tada važe

Teorema 1 (Košijev kriterijum) Da bi nesvojstveni integral $\int_a^b f(x)dx$ konvergirao potrebno je i dovoljno da $\forall\varepsilon>0$ postoji takvo $\delta>0$ da za svako $\alpha', \alpha'', \beta', \beta'$ za koje je $0<\alpha''<\alpha'<\delta$, $0<\beta'<\beta''<\delta$ važi nejednakost

$$\left|\int_{c-\alpha'}^{c-\alpha''} f(x)dx + \int_{c+\beta'}^{c+\beta''} f(x)dx\right| < \varepsilon,$$ ako je $a<c<b$.

Ako je $c=a$ ($c=b$) to tada naša nejednakost ima oblik

$\left|\int^{a+\beta''} f(x)dx\right|<\varepsilon$ $\left(\left|\int^{b-\alpha''} f(x)dx\right|<\varepsilon\right)$

Teorema 2 (Kriterijum upoređivanja)

Neka u okolini tačke c $a<c<b$ koja ne sadrži tačku c, ili u lijevoj okolini tačke $c=b$ (ili u desnoj okolini $c=a$) su definisane dvije nenegativne f-je $f(x)$ i $g(x)$, $0\le f(x)\le g(x)$. Tada iz konvergencije nesvojstvenog integrala $\int_a^b g(x)\,dx \Rightarrow$ konvergencija $\int_a^b f(x)\,dx$, a iz divergencije $\int_a^b f(x)\,dx$ slijedi divergencija $\int_a^b g(x)\,dx$.

Teorema 3 (granični kriterijum upoređenja) Neka su f-je $f(x)$ i $g(x)$ pozitivne na $[a,b]$, $x\ne c$. Tada ako postoji ~~tad~~ konačna granična vrijednost $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=L>0$, to nesvojstveni integrali $\int_a^b f(x)\,dx$ i $\int_a^b g(x)\,dx$ konvergiraju ili divergiraju istovremeno.

Primjer

Ispitati konvergenciju integrala

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha},\ \alpha>0$$

Rj.

$x\to 0$ podint. f-ja neograničena

$$\int_0^1\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{\varepsilon\to+0}\begin{cases}\left.\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_\varepsilon^1 & \alpha\ne1\\ \left.\ln x\right|_\varepsilon^1 & \alpha=1\end{cases}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\begin{cases}\frac{1}{1-\alpha}-\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}}\cdot\frac{1}{1-\alpha}, & \alpha\ne1\\ \ln1-\ln\varepsilon\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{1-\alpha}, & \alpha<1\\ +\infty, & \alpha\ge1\end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\alpha<1$ konv, $\alpha\ge1$ divergira.

Primjer Ispitati konv. integrala $\int_0^1\frac{x+1}{x\sqrt{x+2}}\,dx$

Rješenje $x\to0$ podint f-ja neograničena.

Kad $x\to0$ ~~$\frac{x+1}{x\sqrt{x+2}}\sim g(x)=\frac{1}{x\sqrt2}$~~ $\qquad \frac{x+1}{x\sqrt{x+2}}\sim\frac{1}{x\sqrt2}=g(x)$

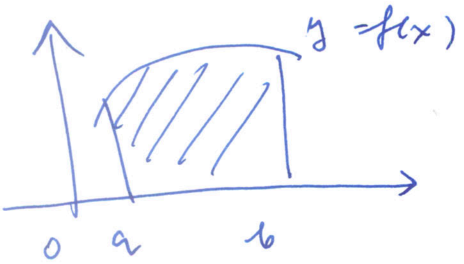
u $(0,\varepsilon)\Rightarrow$ $\frac{x+1}{x\sqrt{x+2}}$, $x+1>1$ $\qquad \int_0^1\frac{1}{x\sqrt2}\,dx$ divergira

Pošto je $\lim\limits_{x\to0+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to0+0}\frac{(x+1)x\sqrt2}{x\sqrt{x+2}}=1\Rightarrow\int_0^1 f(x)\,dx$ divergira.

Geometrijska primjena određenog integrala

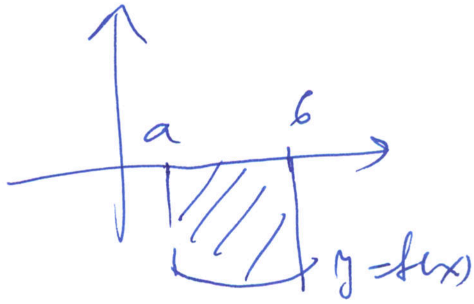
Površina ravnog lika

$f(x)\ge 0$, $x=a$, $x=b$, $\forall x\in[a,b]$



$$S=\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b y\,dx$$

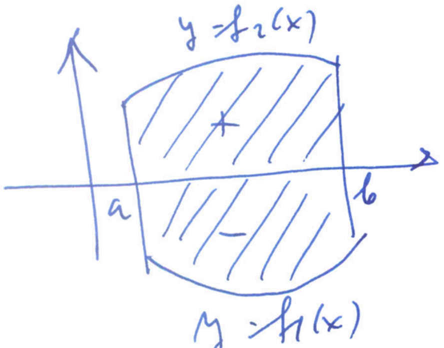
$S\ge 0$



$f(x)\le 0\ \forall x\in[a,b]$

$\int_a^b f(x)\,dx\le 0$, $a<b$

$$S=\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|=-\int_a^b f(x)\,dx$$

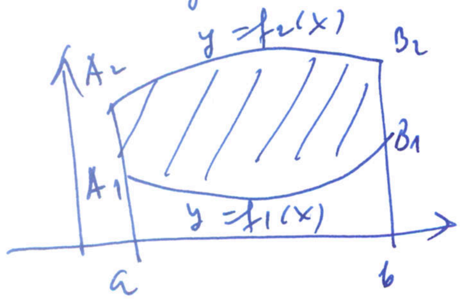


$y=f_1(x)\le 0$
$y=f_2(x)\ge 0$ $a\le x\le b$

$S=S_1+S_2$
$S_1=\int_a^b f_2(x)\,dx$
$S_2=-\int_a^b f_1(x)\,dx$

$$S=\int_a^b f_2(x)\,dx-\int_a^b f_1(x)\,dx=$$

$$=\int_a^b \big(f_2(x)-f_1(x)\big)\,dx.$$



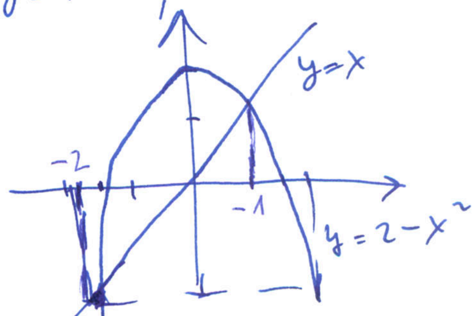
$$S_{A_1B_1B_2A_2}=S_{aA_2B_2b}-S_{aA_1B_1b}=$$

$$=\int_a^b f_2(x)\,dx-\int_a^b f_1(x)\,dx=\int_a^b\big(f_2(x)-f_1(x)\big)\,dx$$

Primjer Izračunati površinu figure ograničenu grafima $y=f_1(x)=x$ i $y=f_2(x)=2-x^2$

Rješenje: Nađimo apscise presjeka prave $y=x$ sa parabolom $y=2-x^2$. Riješimo sistem

$$\begin{cases} y=x\\ y=2-x^2\end{cases}\qquad \begin{aligned} x_1&=a=-2\\ x_2&=b=1\end{aligned}$$



$$S=\int_a^b\big(f_2(x)-f_1(x)\big)\,dx=\int_{-2}^{1}(2-x^2-x)\,dx=$$

$$=2x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{1}=\cancel{2-\frac13-\frac12+4+\frac83+2}=$$

$$=\cancel{-3-\frac12+4}=.$$

$$=\frac92$$

$2-\frac13-\frac12-\left(-4+\frac83-2\right)$

$=2-\frac13-\frac12+6-\frac83=$

$=8-3-\frac12=5-\frac12=\frac92$

Ako je f-ja zadata parametarski

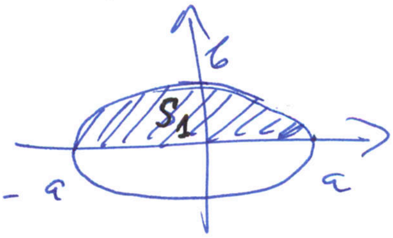
$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta$$

$$x = \varphi(t),\ dx = \varphi'(t)dt \Rightarrow y = f(\varphi(t)) = \psi(t)$$

$$\Rightarrow S = \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta \psi(t)\,\varphi'(t)dt$$

Primjer Naći površinu elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



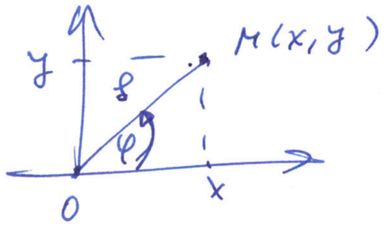
$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \quad -\pi \le t \le \pi$$

$$S = 2S_1 = 2\int_{-a}^{a} y\,dx = -2\int_\pi^0 ab\sin^2 t\,dt = -ab\int_\pi^0 (1-\cos 2t)dt =$$

$$= -ab\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_\pi^0 = \pi ab$$

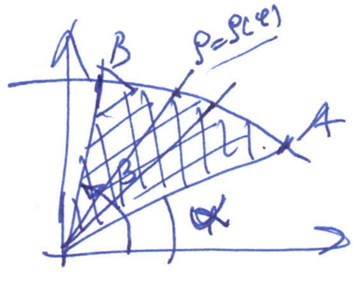
Površina ravnog lika u polarnim koordinatama

$$x = \rho\cos\varphi$$
$$y = \rho\sin\varphi$$



$$\rho = \sqrt{x^2+y^2} \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Primjer $x^2+y^2=\rho^2 \Rightarrow$ kružnica $x^2+y^2=a^2 \Rightarrow \rho = a$ u polarnim koordinatama



$$\rho = \rho(\varphi) \ge 0$$
$$\alpha \le \varphi \le \beta \quad \varphi = \alpha,\ \varphi = \beta$$

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2 d\varphi$$

Dužina luka krive $y = f(x)$ $x \in [a,b]$

$$l = \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$

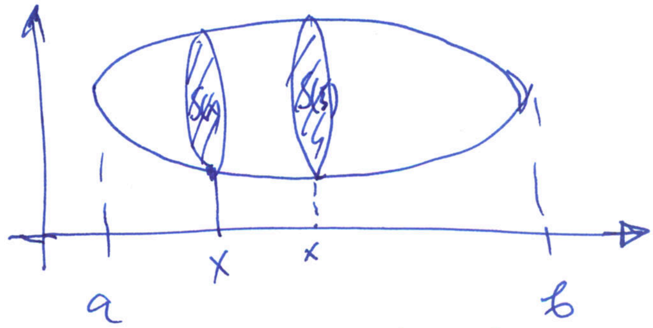
$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi$$

$x = x(t)$ $y = y(t)$ $t \in [\alpha,\beta]$ $\quad l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}$

Računanje zapremine tijela

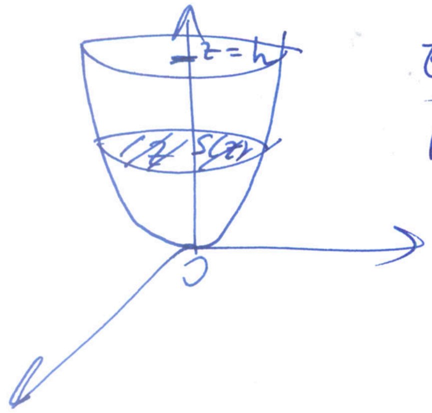
Imamo tijelo T i površina presjeka sa ravni koja je normalna na osu Ox ovog tijela je $S=S(x)$. $S(x)$ neprekidna fja za svako $x\in[a,b]$. Tada je

$$V=\int_a^b S(x)\,dx$$



Primjer Naći zapreminu tijela ograničenog površima

$$z=2x^2+\frac{9}{2}y^2,\ z=h$$



Eliptički paraboloid. $z=2x^2+\frac{9}{2}y^2$

presjecamo sa $z=\text{const}$ $\Rightarrow$ dobijamo elipsu

$$\frac{x^2}{z/2}+\frac{y^2}{\frac{2z}{9}}=1 \Rightarrow$$

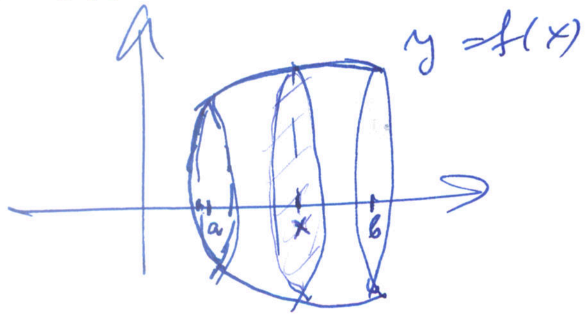
$$\Rightarrow \frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{z}{2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\sqrt{\frac{2z}{9}}}=1$$

S poluosama $a=\sqrt{z/2}$, $b=\sqrt{\frac{2z}{9}}$

$$S=S(z)=\pi ab=\pi\sqrt{\frac{z}{2}}\cdot\sqrt{\frac{2z}{9}}=\pi\frac{z}{3},\quad 0\le z\le h$$

$$V=\int_0^h \frac{\pi z}{3}\,dz=\frac{\pi z^2}{6}\Big|_0^h=\frac{\pi h^2}{6}.\ \Delta$$

Neka je tijelo T dobijeno rotacijom neke krive $y=f(x)$, $x\in[a,b]$ oko x ose. Ako presječemo ovo tijelo sa ravni normalnom na Ox osu dobijemo u presjeku krug čiji je radijus jednak $|f(x)|$. Slijedi da je površina presjeka $S(x)=\pi f^2(x)$ pa je zapremina ovog tijela

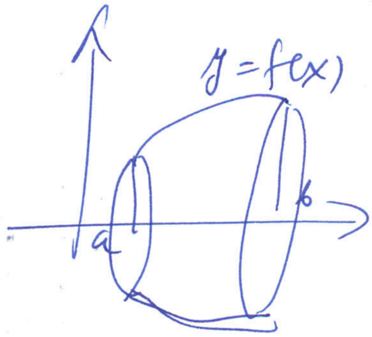


$$\boxed{V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx}$$

Površina rotacionog tijela

Na $[a,b]$ imamo nenegativnu fju $f(x)$ neprekidno diferencijabilnu. Treba naći površinu tijela koje se obrazuje rotacijom njenog grafika oko Ox ose.

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$



Često se umjesto Ox ose rotira oko Oy ose to je umjesto $y=f(x)$ potrebno sve izraziti x preko y tj $x=g(y)$

$c \leq y \leq d$

$$P = 2\pi\int_c^d g(y)\sqrt{1+g'^2(y)}\,dy$$

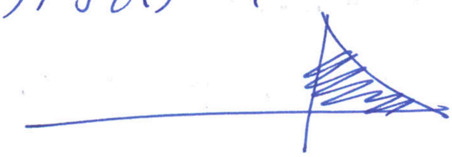
Ako je $y=f(x)$ zadata parametarski

$x=\varphi(t),\ y=\psi(t) \quad \alpha \leq t \leq \beta$

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \Rightarrow P = 2\pi\int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$$

U polarnim koordinatama imamo da je

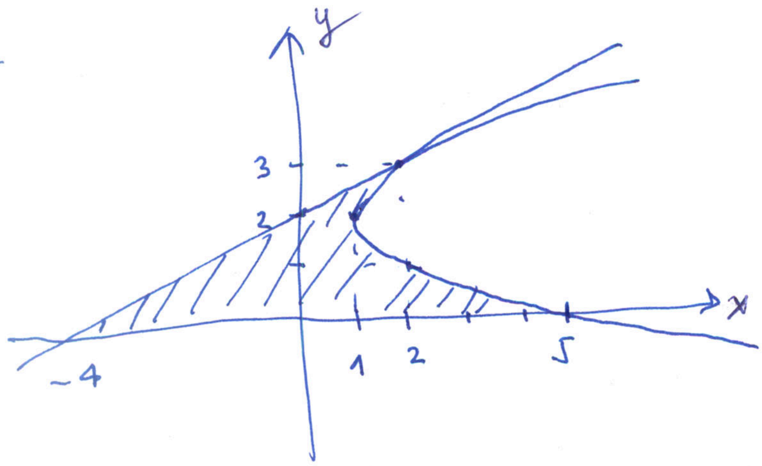
$$P = 2\pi\int_\alpha^\beta \rho(\varphi)\sin\varphi\sqrt{\rho'^2(\varphi)+\rho^2(\varphi)}\,d\varphi$$



$[x_{i-1}, x_i]$

Primjer Naći površinu figure koja je ograničena parabolom $(y-2)^2 = x-1$ i tangentom na grafik funkcije u tački čija je ordinata $y_0 = 3$ i x-osom.

Rješenje



Primijenićemo formulu

$$S = \int_c^d [f_2(y) - f_1(y)]\,dy, \quad c<d$$

Jednačinu parabole zapišimo u obliku $x = y^2 - 4y + 5 = f_2(y)$

Jednačina tangente ima oblik $y_0 = 3, x_0 = 2$

$$x - x_0 = x'_y(y_0)(y - y_0)$$

$$x'_y = 2y - 4 \quad x'_y(3) = 2$$

$$x - 2 = 2(y-3) \;\Rightarrow\; x = 2y - 4 = f_1(y)$$

$$S = \int_0^3 [(y^2 - 4y + 5) - (2y - 4)]\,dy = \int_0^3 (y-3)^2\,dy = 9$$